数理解析研究所講究録
575巻 1985年 198-212

Fibered 2-knots and Thurston Norm

東大理　斎藤 昌彦（Masahico Saito）

§0. Introduction

S^4の中のsmooth knot K（$\cong S^2$）がfiberedであるとは，$S^4 \setminus K$がS^1上のfiber bundleであり，fiberはM^o，ただし$M^o = \mathrm{punc}\, M = M \setminus \mathrm{Int}\, B^3$，Mはclosed orientable 3-manifoldのときをいう。このとき，diffeomorphism $h : M^o \to M^o$によって

$$S^4 \setminus K = M^o \underset{h}{\times} S^1 = M^o \times I / \sim$$
$$((x, 0) \sim (h(x), 1), \ x \in M^o)$$

と書けるが，このhをmonodromyという。

また，KのAlexander polynomial $f(t)$は，

$$f(t) = \det(tI - h_*)$$

で与えられる。ただし，h_*は，hが$H_1(M^o, \mathbb{Q})$に誘導するautomorphismである。

Polynomial $f(t)$がfibered 2-knotのAlexander polynomialとなるための条件は，

(☆) $f(1)=\pm 1$，最高次と最低次の項の係数が ± 1

であることが知られている。本稿では，fibered 2-knot の新しい構成法を考えるが，まず今まで知られている構成法を以下にまとめてみる。

(0) Zeeman の twist spun knot [Z]

$K \subset S^3$ を classical knot とするとき，

$$(S^4, \tilde{K}) = \{(S^3, K) \setminus \mathrm{Int}(B^3, B^1)\} \underset{\tau^k}{\times} S^1 \cup S^2 \times D^2$$

（τ^k は K を k 回"回転"する写像，$k \neq 0$）

で与えられる。Fiber は $(N^k)^0$，N^k は S^3 の K に沿った k-fold cyclic branched covering である。この covering の transformation が $\tilde{K}$ の monodromy となる。したがって *Alexander polynomial* $f(t)$ は (t^k-1) を割り切る。[L], [M], [P] に於てこの方法が一般化された：

$$(S^3 \setminus K) \underset{g}{\times} S^1 \underset{A}{\cup} Tw, \quad Tw \text{ は"twin"}([M])$$

とくに $g=$ identity のときには，fiber は $((N^k)_p)^0$，$(N^k)_p$ は N^k の branch set（K の lift）に沿って surgery したものであり，monodromy はやはり finite order を持つ。

(1) Untwisted spin of classical fibered knot

(S^3, K) が classical fibered knot のときには，

$$(S^4, \tilde{K}) = \{(S^3, K) \setminus \mathrm{Int}(B^3, B^1)\} \times S^1 \cup S^2 \times D^2$$

も fibered knot となり，fiber は $(\underset{2g}{\#} S^2 \times S^1)^0$，（$g$ は K の genus）

Alexander polynomial は K のそれに等しい。

(2) Asano-Yoshikawa の方法 [A-Y]

条件(☆)を満たす任意の polynomial $f(t)$ に対し, $f(t)$ を Alexander polynomial として持つ fibered 2-knot が存在することが, [A-Y] に於て, 次の様にして証明された。

$h: F_m \to F_m$ を rank m の free group F_m の automorphism で, 次の条件(i), (ii) を満たすものとする。

(i) h の abel 化 $h_*: \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^m$ に対し, $\det(tI - h_*) = f(t)$

(ii) 群 $\langle t, x_1, \cdots x_m \mid t,\ t x_i t^{-1} h(x_i)^{-1} \quad (i=1, \cdots m) \rangle$ は "Andrews-Curtis moves" [A-C] で trivial presentation になる。

このとき, V_m を4次元 handle body, $\bar{h}: V_m \to V_m$ を, $\bar{h}_* = h: \pi_1(V_m) \to \pi_1(V_m)$ となる diffeomorphism とするとき, $V_m \underset{\bar{h}}{\times} S^1$ に (1点) $\underset{\bar{h}}{\times} S^1$ に沿って 2-handle を attach すると B^5 になり, その boundary に求める fibered 2-knot が実現される。

この方法でも fiber は $(\underset{m}{\#} S^2 \times S^1)^\circ$ になっている。

以上の構成法で, (0) では fiber としては いろいろな 3-manifold ができるが Alexander polynomial には $(t^n - 1)$ を割り切るという制限がつき, 一方 (1) (2) では Alexander polynomial は豊富にできるが fiber としては $(\# S^2 \times S^1)^\circ$ しかできないことがわかる。

§1. Thurston norm との関係

Fを orientable surface とし, $F=\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ を各componentとするとき, $\chi_-(F)=\sum_{i=1}^{n}\max\{0, -\chi(F_i)\}$ をFの complexity という。Mを closed orientable 3-manifold とするとき, $a\in H_2(M, \mathbb{Z})$ に対し, $x(a)=\min.\{\chi_-(F) \mid [F]=a$, $F\subset M$ は closed orientable surface embedded in M $\}$ と定義すると, x は pseudo-norm になり, $H_2(M, \mathbb{R})$ に連続に拡張する。これを Thurston norm という。また, Mが条件

(*) x は $H_2(M: \mathbb{Z})$ 上の norm である

(⇔ $H_2(M, \mathbb{Z})$ の0でない元をrepresentする任意のembedded surface の Euler 数が負である)

を満たすとき, Image(Diff(M) → Aut $H_2(M, \mathbb{Z})$) は有限である。(以上 Thurston [T])

したがって fibered 2-knot $K\subset S^4$ の fiber M° に対し, Mが条件(*)を満たすならば, Kの Alexander polynomial は, ある n に対し, (t^n-1) を割り切らなければならない。これは §0 の(0)に対応している。逆に豊富な Alexander polynomial をもつ fibered 2-knot の fiber は(*)を満たさないものでなければならないが, 実際 §0 の(1), (2)では fiber はすべて $(\# S^2\times S^1)^\circ$ (homology を represent する surface はすべて S^2) であった。以上のことから, 与えられた Alexander polynomial をもつ

fibered 2-knot で，fiber が irreducible であるものが存在するか，という問題を考える。

§2. Main Theorem

$f(t)$ が classical fibered knot の Alexander polynomial となるための条件は，

($\star_0$)　$f(t) \doteq f(t^{-1})$　($\Leftrightarrow f(t) = f(t^{-1}) \cdot t^k$ for some $k \in \mathbb{Z}$)

かつ（$\star$）を満たす

である。

<u>Theorem.</u>　$f(t)$ を ($\star_0$) を満たす任意の polynomial とするとき，Alexander polynomial が $f(t)$ で，fiber は M^0，M は irreducible となる fibered 2-knot が存在する。

<u>Outline of proof.</u>　(S^3, K) を Alexander polynomial が $f(t)$ となる classical fibered knot とし，$(S^4, \overline{K})$ をその untwisted spin（§0. (1)）とする。

$(S^4, \overline{K}) = \{(S^3, K) \setminus \mathrm{Int}(B^3, B^1)\} \times S^1 \cup S^2 \times D^2$

$N(K)$ を（S^3 内での）K の tublar neighbourhood で，$N(K) \supset B^3$ を満たすものとし，p を S^1 の 1 点，T を $(\partial N(K)) \times p$　($\subset S^4 \setminus \overline{K}$)とする。

$$(S^4, \bar{K}) = \{(S^3, K) \setminus \mathrm{Int}(B^3, B^1)\} \times \overset{p}{\underset{\cup}{\overset{\pitchfork}{S^1}}} \cup S^2 \times D^2$$
$$\partial N(K) \times p = T \quad (\cong T^2)$$

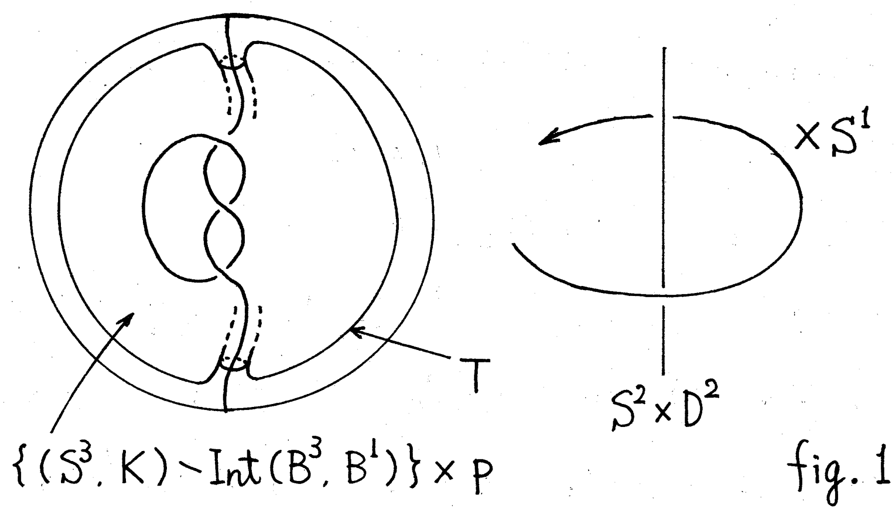


fig. 1

Tは次の性質をもつ：

① $(S^4, \bar{K})$のすべてのfiber S $(\cong (\#_{2g} S^2 \times S^1)^0$, gはKのgenus）にtransverse

② unknotted (i.e. $S^1 \times D^2$をbound, [H-K]) in S^4

S^4内でのTのtublar neighbourhoodを$N(T)$, $\partial N(T)$上のsimple closed curves m, l_1, l_2を

$$\begin{cases} m = \partial D^2 \subset D^2 \times T^2 \cong N(T) & : H_1(S^4 \setminus T, \mathbb{Z})\text{の generator} \\ l_1 \subset S \ (\bar{K}\text{の一枚の fiber}) & \rbrace\ 0 \text{ in } H_1(S^4 \setminus T, \mathbb{Z}) \\ l_2 = (S\text{上の1点}) \times (\text{fiberの方向}) & \end{cases}$$

ととる。

また，$S^1\times S^1\times D^2$ の boundary 上に simple closed curves m', l_1', l_2' を

$$\begin{array}{ccccc} S^1 & \times S^1 & \times D^2 & \supset & \\ \psi & \psi & \cup & & \\ p_1 & p_2 & \partial D^2 & & \\ & & \psi & & \\ & & p_3 & & \end{array} \quad \begin{cases} m' = p_1\times p_2\times \partial D^2 \\ l_1' = S^1\times p_2\times p_3 \\ l_2' = p_1\times S^1\times p_3 \end{cases}$$

ととり，diffeomorphism $h: \partial(S^1\times S^1\times D^2)\to\partial(S^4 - \mathrm{Int}\,N(T))$

を $\begin{cases} h(m') = m + k l_1, & k\in\mathbb{Z} \\ h(l_1') = l_1, & h(l_2') = l_2 \end{cases}$

を満たすものとする。②より，$\{S^4 - \mathrm{Int}\,N(T)\}\underset{h}{\cup}(S^1\times S^1\times D^2)$ は再び S^4 となり，①と h のとり方により，$\bar{K}$ のすべての fiber に同じ surgery をしたことになるので，この h による S^4 の surgery の結果，新らしい S^4 の中の fibered 2-knot $\tilde{K}$ が得られる。

（$\tilde{K}$ は，$\bar{K}$ の fibering に対して "equivariant Dehn surgery" をしてできた 2-knot である。）

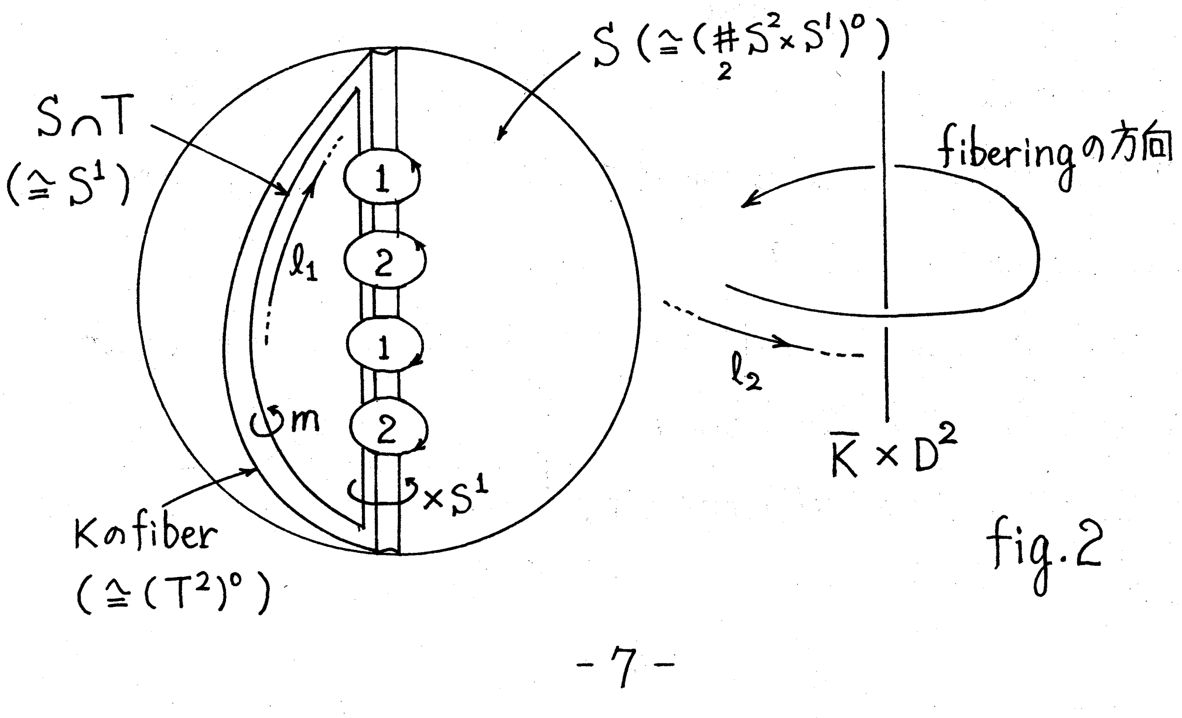


fig. 2

fig. 2 は K の genus が 1 のときを示している。1 の ball, 2 の ball 同志を同一視すると $(\#_2 S^2 \times S^1)^\circ$ になっている。この中に K の fiber の一枚 ($\cong (T^2)^\circ$) が入っていて，その上に $S \cap T$ がある。
h による surgery でできた fibered 2-knot $\tilde{K}$ の fiber は，S を，$S \cap T$ に沿って $(1/k)$-surgery したものである。fig. 3 はその fiber M を示している。

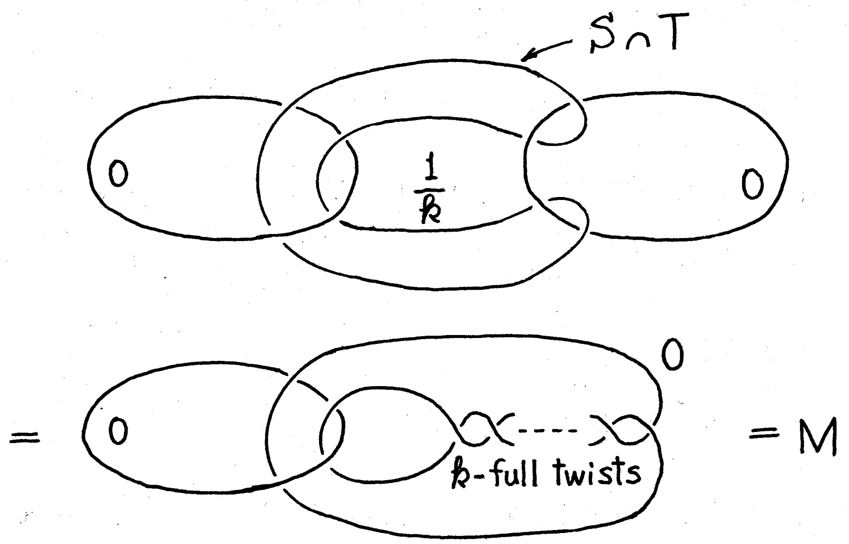


fig. 3

monodromy の不変性： K の monodromy を $F_1 : S \circlearrowleft$, $\tilde{K}$ の monodromy を $F_2 : M^\circ \circlearrowleft$ とするとき，$S \setminus \mathrm{Int}\, N(S \cap T) \cong M^\circ \setminus \mathrm{Int}\, N(M^\circ \cap T)$ であり，$F_1|_{S \setminus \mathrm{Int} N(S \cap T)} = F_2|_{M^\circ \setminus \mathrm{Int} N(M^\circ \cap T)}$ が成り立つ。
$H_1(S : \mathbb{Z})$, $H_1(M^\circ : \mathbb{Z})$ の生成元として，それぞれ $S \setminus \mathrm{Int}\, N(S \cap T)$, $M^\circ \setminus \mathrm{Int}\, N(M^\circ \cap T)$ 内の loop をとることができるので，上のことから，$(F_1)_* = (F_2)_*$ となる。K の Alexander polynomial は K のそれに等しいので，$\tilde{K}$ の Alexander polynomial も $f(t)$ となる。

Mの irreducibility：（宮崎桂氏の指摘による） Mを以下の様に記述しなおす。（以下簡単のため Kの genusを1とする。） $L=L_1\cup L_2$ を 2-component unlink とし，$g:\partial N(L_1)\to\partial N(L_2)$ を，L_1 の meridian-longitude pair を L_2 の meridian-longitude pair にうつす diffeomorphism とするとき，$S^3-\mathrm{Int}\{N(L_1)\cup N(L_2)\}$ の boundary を g で同一視してできる 3-manifold は $\underset{2}{\#}S^2\times S^1$ である：

$$S^3-\mathrm{Int}\{N(L_1)\cup N(L_2)\}/g\ \cong\ \underset{2}{\#}S^2\times S^1$$

これを $\bar{K}$ の fiber S と思うと，その中に，$S\cap T$ は fig.4の様に入っている。Mは $S\cap T$ に沿って surgery して得られるから，fig.5の link $L'=L_1'\cup L_2'$ に対し，$g':\partial N(L_1')\to\partial N(L_2')$ を g から得られる diffeomorphism とするとき，

$$M\cong\ S^3-\mathrm{Int}\{N(L_1')\cup N(L_2')\}/g'$$

となる。L' は unsplittable link であり，このようにしてできる3-manifold は irreducible であることが Brakes [B] によってわかっている。したがって Mは irreducible である。

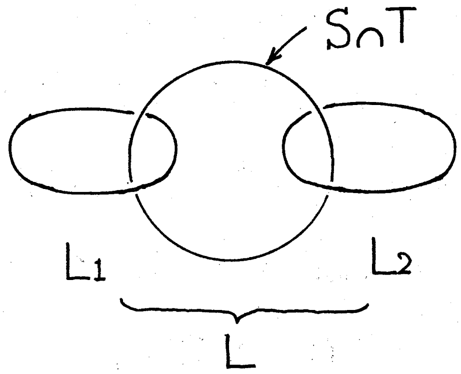


fig.4

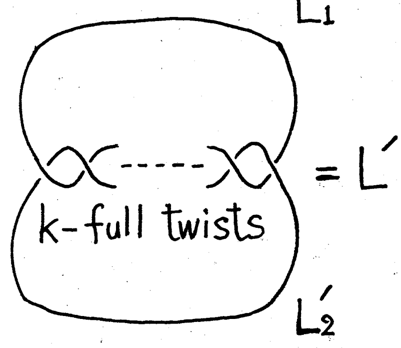


fig.5

§3. Other Examples

以上の構成法を用いて，さらに別の fiber を持つ fibered 2-knot を構成することができる。

K_1, $K_2 \subset S^3$ を（unknot でない）classical fibered knots とするとき，fig. 6 のように，$S^3 \setminus K_1 \# K_2$ 内に，disjoint に embed された，$K_1 \# K_2$ のすべての fiber に transverse に交わる 3つの tori T_0, T_1, T_2 が存在する。§2 と同様に，$K_1 \# K_2$ の untwisted spin $\overline{K_1 \# K_2}$ を考え，T_0, T_1, T_2 が $S^4 \setminus \overline{K_1 \# K_2}$ 内に入っていると思い，それらに沿って "equivariant Dehn surgery" をすることによって，新らしい fiber ができる。fig. 7 はこの結果できた fiber を示している。

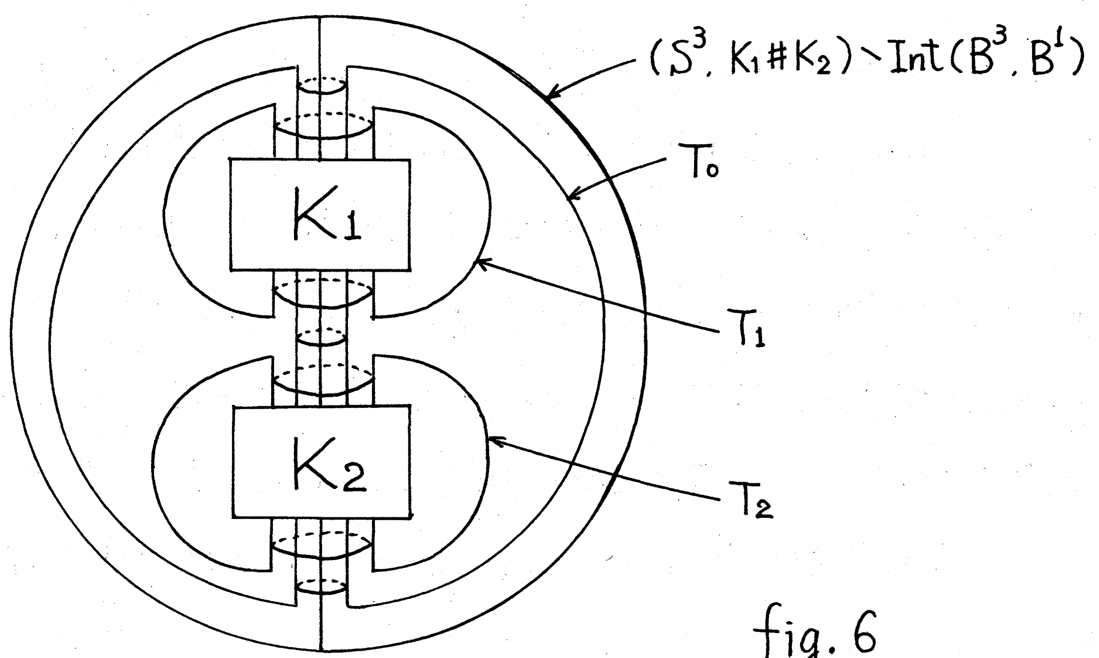
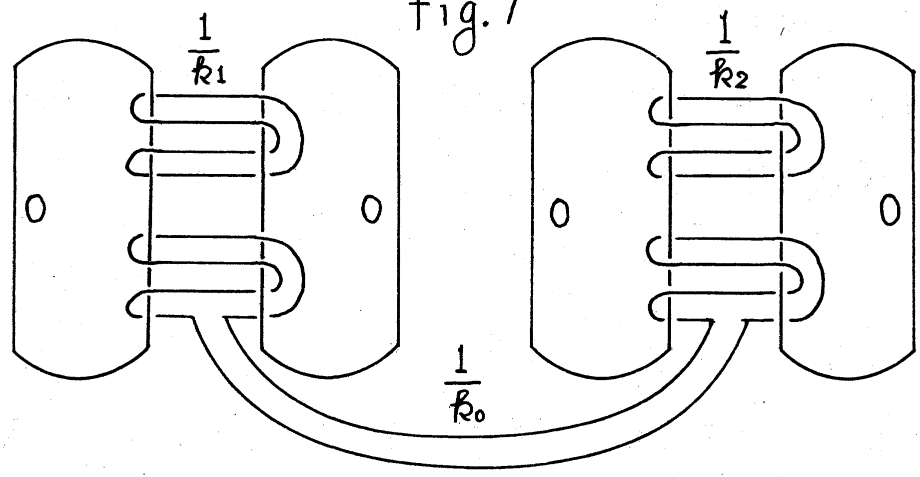


fig. 6

fig.7



ただし，fig.7では，K_1とK_2のgenusがいずれも1であり，T_0，T_1，T_2に沿ってそれぞれ係数$1/k_0$，$1/k_1$，$1/k_2$のsurgeryをしてできたfiberである。同様にK_1，K_2のgenusを変えたり，connected sumの数を増して多くのtoriに沿ってsurgeryすることにより，いろいろな3-manifoldをfiberとして持つfibered 2-knotを構成することができる。

また，periodic monodromyをもつclassical fibered knot（torus knot）のcomplementの中に，すべてのfiberにtransverseなimmersed torusをつくり，これのuntwisted spinを考え，4次元でembedded torusになおしてsurgeryする方法も考えられるが，この場合はできた2-knotもperiodic monodromyをもつため，§0.(0)の方法で構成される2-knotと一致してしまう可能性がある。

§4. Final Remark

§2. の Theorem の仮定の polynomial についての条件 (☆$_0$) でなく，一般に (☆) で成り立つような fibered 2-knot を構成するために，§0. (2) の構成法を応用することが考えられる。すなわち，$h: F_m \to F_m$ を rank m の free group F_m の automorphism で，§0. (2) の条件 (i) (ii) に加え，次の条件 (iii) も満たすものとする：

(iii) h は 1 ではない fixed point γ ($\gamma \in F_m$, $h(\gamma) = \gamma$) をもち，$\pi_1(V_m) \cong F_m$ で γ を represent する simple closed curve $\bar{\gamma}$ を $\partial V_m \cong \#_m S^2 \times S^1$ にとると，$S^4 = (\#_m S^2 \times S^1)^0 \underset{\bar{h}}{\times} S^1 \cup S^2 \times D^2$ 内に embedded torus $T_{\bar{\gamma}} = \bar{\gamma} \underset{\bar{h}}{\times} S^1$ がとれるが，この $T_{\bar{\gamma}}$ が S^4 の中で unknotted であるようにできる。(V_m, $\bar{h}$ 等については §0 (2) 参照)

このとき，§0 (2) の方法で構成した fibered 2-knot に対して，§2. と同様に $T_{\bar{\gamma}}$ に沿って "equivariant Dehn surgery" をすることによって新らしい fibered 2-knot が得られる。

ところが $\det(tI - h_*)$ が (☆) を満たすような h は，あまり fixed point を持たないことが知られている。(c.f. [G-T], [G], [S]) とくに，次のような予想がある。

$m \times m$-integer matrix で determinant が ± 1，固有値を $\lambda_1 \cdots \lambda_m$ とするとき，$|\lambda_1| > 1$, $|\lambda_i| < 1$ ($i = 2, \cdots m$) をみたすものを "P-V matrix" といい，automorphism $h: F_m \to F_m$ に対して

abel化 $h_*: \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^m$ が P-V matrix となるとき h を "P-V automorphism" という。Stallings [S] は「rank が 3 以上の P-V automorphism の fixed point は 1 だけである」という予想をした。具体的に与えられた automorphism に対して fixed point を求める方法は知られている [G] が，一般にはこの予想は未解決である。もしこの予想が正しければ，P-V matrix の characteristic polynomial となるような polynomial に対しては，上に述べたような構成法は使えないことがわかる。条件 (☆) を満たし，かつ (i)(ii)(iii) をも満たす polynomial を characteristic polynomial として持つような free group の automorphism はまだ見つかっていない。したがってこの構成法で新らしい fibered 2-knot ができるかどうかは不明である。

References

[A-C] J.J. Andrews & M.L. Curtis
Free Groups and Handle Bodies, Proc. Amer. Math. Soc. 16, (1965) 192-195

[A-Y] K. Asano & K. Yoshikawa
On Polynomial Invariants of Fibered 2-knots. Pacific J. of Math. 97, 2, (1981) 267-269

[B] W.R. Brakes
Property R and Superslices. Quart. J. Math. Oxford

(2) 31 (1980) 263-281

[G] S.M. Gersten

On Fixed Points of Certain Automorphisms of Free Groups.

Proc. London Math. Soc. (3). 48 (1984) 72-90

[G-T] R.Z. Goldstein & E.C. Turner

Automorphisms of Free Groups and Their Fixed Points.

Inv. Math. 78, 1-12 (1984)

[H-K] F. Hosokawa & A. Kawauchi

Proposals for Unknotted Surfaces in Four-spaces.

Osaka J. Math. 16 (1979) 233-248

[L] R.A. Litherland

Deforming Twist-spun Knots. Trans. Amer. Math. Soc.

250, (1979) 311-331

[M] J.M. Montesinos

On Twins in the 4-sphere I, II. Quart. J. Math.

Oxford. 34, 171-199, 35, 73-83 (1983, 4)

[P] S.P. Plotnick

Fibered Knots in S^4 — twisting, spinning, rolling, surgery, and branching. Four manifold theory, A.M.S. Contemporary Math. (1982) 437-460

[S] J.R. Stallings

Topologically Unrealizable Automorphisms of Free Groups.
Proc. of Amer. Math. Soc. (1) 84 (1982) 21-24

[T] W.P. Thurston
A Norm for the Homology of 3-manifolds. Preprint.

[Z] E.C. Zeeman
Twisting Spun Knots. Trans. Amer. Math. Soc. 115 (1965) 471-495